ΣΤ.
Κρίση & η τιμολόγηση στις αγορές

Συστηματικά σφάλματα στις προβλέψεις των αναλυτών και τακτική κατανομή επενδύσεων

Νικόλαος Κουρογένης
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Νικήτας Πιττής
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία εξετάζεται η επίπτωση της χρήσης του υποδείγματος Arbitrage Pricing (Ross, 1976), για τις αποδόσεις μιας οποιασδήποτε μορφής επένδυσης, όταν η υπόθεση της ορθολογικότητας του επενδυτή δεν ισχύει. Εξετάζεται η περίπτωση στην οποία η μη-ορθολογικότητα πηγάζει από την ύπαρξη συστηματικού σφάλματος στις προβλέψεις των αναλυτών για τους παράγοντες του υποδείγματος. Δείχνεται ότι αυτή η συστηματικότητα κληρονομείται από το σφάλμα των προβλέψεων των μελλοντικών αποδόσεων και παρουσιάζεται ένας τρόπος διόρθωσης αυτού του φαινομένου με την ένταξη του σφάλματος των αναλυτών σε ένα απλό στατιστικό υπόδειγμα. Η προσέγγιση αυτή εφαρμόζεται σε δύο περιπτώσεις, βελτιώνοντας το μέσο σφάλμα πρόβλεψης των αποδόσεων.

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τον Ηλία Τζαβαλή για τα εποικοδομητικά σχόλιά του πάνω σε αυτό το άρθρο.

1. Εισαγωγή

Η επιτυχημένη διαχείριση χαρτοφυλακίου βασίζεται στην αμερόληπτη εκτίμηση της αβεβαιότητας που χαρακτηρίζει τον επενδυτικό ορίζοντα. Η αμερόληπτη ή ορθολογική εκτίμηση της αβεβαιότητας επιτυγχάνεται όταν ο διαχειριστής καταφέρει να εκτιμήσει με ακρίβεια την από κοινού κατανομή πιθανοτήτων των αποδόσεων των διαφόρων κατηγοριών επενδύσεων (asset classes) στα οποία επιθυμεί να επενδύσει. Με άλλα λόγια, αυτό που πρωτίστως πρέπει να κάνει ο διαχειριστής είναι να εκτιμήσει με ακρίβεια τις αντικειμενικές πιθανότητες που χαρακτηρίζουν το «στοίχημα» στο οποίο εισέρχεται. Δεδομένης της πολυπλοκότητας και του πλήθους των διαφόρων κατηγοριών επενδύσεων, τίθεται εύλογα το ερώτημα κατά πόσο είναι δυνατή η αξιοποίηση της υπάρχουσας πληροφορίας ώστε ο διαχειριστής/επενδυτής να χαρακτηριστεί ως ορθολογικός.

Η υπόθεση του ορθολογικού επενδυτή είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη Σύγχρονη Θεωρία Χαρτοφυλακίου (ΣΘΧ), η οποία εξελίχθηκε από την αρχή της δεκαετίας του '50 (βλέπε Markowitz, 1952) μέχρι και την αρχή της δεκαετίας του '70. Η ορθολογικότητα του μεμονωμένου επενδυτή αποτέλεσε μία από τις κύριες υποθέσεις στις οποίες βασίστηκε η θεμελίωση του Capital Asset Pricing Model (CAPM), από τους Treynor (1962), Sharpe (1964), Lintner (1965a,b) και Mossin (1966), της Arbitrage Pricing Theory (APT) από τον Ross (1976) και του Equilibrium Asset Pricing από τον Merton (1973), ενώ συνέχισε να θεωρείται θεμελιώδης και κατά τις επόμενες δεκαετίες [βλέπε, για παράδειγμα, Ohlson και Garman (1980) και Connor και Korajczyk (1989)].

Όπως είδαμε, ένας μεγάλος όγκος εργασιών, που χαρακτήρισαν τη Χρηματοοικονομική Θεωρία, αποδέχεται την υπόθεση του ορθολογικού επενδυτή. Η αυστηρότητα, όμως, αυτής της υπόθεσης την καθιστούσε ευάλωτη σε κριτική. Για παράδειγμα, αρκετά νωρίς, ο Herbert Simon (1955) εισήγαγε την έννοια της περιορισμένης/φραγμένης ορθολογικότητας (Bounded Rationality) σύμφωνα με την οποία δεν είναι δυνατή η πλήρης αξιοποίηση ή αντίληψη της υπάρχουσας πληροφορίας από ένα άτομο/επενδυτή. Συνεπώς, ο επενδυτής είναι αναγκασμένος να εξαπλουστεύει τις διαθέσιμες επιλογές και, αποδεχόμενος αυτή του την αδυναμία, αναζητά πλέον μία «ικανοποιητική» λύση και όχι τη βέλτιστη. Το ζήτημα που δημιουργείται πλέον, αφορά άμεσα στην ένταξη της μη-ορθολογικότητας στα υποδείγματα αποτίμησης. Στην περίπτωση δε, που αυτό δεν είναι δυνατό, θα πρέπει να αναρωτηθούμε για τις πιθανές επιπτώσεις της χρήσης ενός υποδείγματος που βασίζεται στον ορθολογικό επενδυτή όταν η υπόθεση της ορθολογικότητας δεν ισχύει.

Υποκινούμενοι από το τελευταίο ερώτημα θα αναλύσουμε, στα πλαίσια ενός παραγοντικού υποδείγματος, τις επιπτώσεις της μη-ορθολογικότητας των επενδυτών στις αποδόσεις μιας μορφής επένδυσης. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τα χαρακτηριστικά του υποδείγματος κάτω από ορθολογικές προσδοκίες και θα αναλύσουμε πώς το υπόδειγμα διαφοροποιείται κάτω από μη ορθολογικές προσδοκίες. Τέλος, θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα όπου οι προβλέψεις (forecasts) οικονομολόγων για μακροοικονομικούς παράγοντες παίζουν τον ρόλο των μη ορθολογικών προσδοκιών, εφόσον αναγνωριστεί η ύπαρξη συστηματικού σφάλματος. Και στις δύο περιπτώσεις, η μοντελοποίηση της συστηματικότητας του σφάλματος πρόβλεψης των παραγόντων περιορίζει το μέσο σφάλμα πρόβλεψης των αποδόσεων.

2. Κατανομή επενδυτικών κεφαλαίων (asset allocation)

Το πρόβλημα που θα εξεταστεί στη συνέχεια, στην πρακτική του διάσταση τίθεται ως εξής: Έστω ότι έχουμε ένα δεδομένο ποσό χρημάτων το οποίο επιθυμούμε να κατανείμουμε με «άριστο» τρόπο μεταξύ n εναλλακτικών επενδυτικών κατηγοριών (asset classes), για παράδειγμα μετοχές, κρατικά ομόλογα, εταιρικά ομόλογα, εμπορεύματα κ.λπ. Ο άριστος τρόπος είναι αυτός ο οποίος εξασφαλίζει ένα χαρτοφυλάκιο που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα να παρέχει τη μεγαλύτερη *αναμενόμενη* απόδοση για κάθε εναλλακτικό επίπεδο ρίσκου που επιθυμεί να αναλάβει ο επενδυτής. Η Θεωρία Χαρτοφυλακίου μας λέει ότι προκειμένου να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε τα εξής: (i) Τις αναμενόμενες αποδόσεις όλων των επενδυτικών κατηγοριών στο διάστημα που διαρκεί η επένδυση (για παράδειγμα, μία χρονική περίοδος). (ii) Τις διακυμάνσεις των αποδόσεων που αναμένεται να επικρατήσουν στο διάστημα που διαρκεί η επένδυση. (iii) Τις συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων που αναμένεται να επικρατήσουν στο διάστημα που διαρκεί η επένδυση.

Κατ' αρχήν είναι σημαντικό να αναλύσουμε διεξοδικά την έννοια της αναμενόμενης απόδοσης. Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα είναι τι νομιμοποιείται ο τυπικός επενδυτής να αναμένει σχετικά με τις μελλοντικές αποδόσεις των διαθέσιμων κατηγοριών επένδυσης. Με άλλα λόγια, πότε οι προσδοκίες του μπορούν να θεωρηθούν ως ορθολογικές. Μια πρώτη απάντηση σε αυτό το ερώτημα μπορεί να δοθεί με βάση τα όσα αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, οι προσδοκίες του είναι ορθολογικές όταν ταυτίζονται με τις αντίστοιχες αντικειμενικές (μαθηματικές) προσδοκίες που διαμορφώνονται με βάση τις πιθανοτικές ιδιότητες του στοχαστικού μηχανισμού που παράγει τις αποδόσεις.

Ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος μετράται σε μήνες και ο τυπικός επενδυτής βρίσκεται στη χρονική στιγμή (μήνα) t στην οποία καλείται να αποφασίσει για τη δημιουργία του άριστου χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από ποσοστά των n διαθέσιμων επενδυτικών κατηγοριών, το οποίο θα διακρατήσει έως τη χρονική στιγμή t+1 (δηλαδή τον επόμενο μήνα). Προκειμένου να λύσει το συγκεκριμένο πρόβλημα αριστοποίησης χρειάζεται να διαμορφώσει άποψη για τις αναμενόμενες αποδόσεις, τις αναμενόμενες διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις των αποδόσεων τη χρονική στιγμή t+1 με ορθολογικό τρόπο, δηλαδή να ταυτίσει τις υποκειμενικές του προσδοκίες με τις αντίστοιχες αντικειμενικές. Κατά τη χρονική στιγμή t, για παράδειγμα τον Μάρτιο του 2000, η αγορά διαμορφώνει μια άποψη για την κατανομή πιθανοτήτων, $D^s(p_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ της τιμής $p_{i,t+1}$, για την επενδυτική κατηγορία i. Να σημειωθεί ότι το $p_{i,t}$ συμβολίζει τον λογάριθμο της τιμής, έτσι ώστε οι λογαριθμικές διαφορές

$$R_{i,t+1} = p_{i,t+1} - p_{i,t}$$

να προσεγγίζουν τις αποδόσεις, $R_{i,t+1}$. Η υποκειμενική προσδοκία της αγοράς για την τιμή που θα επικρατήσει την t+1 δίνεται από τον υποκειμενικό μέσο $E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ της κατανομής $D^s(p_{i,t+1} \mid \Phi_t)$. Το ερώτημα που τίθεται σε αυτό το σημείο είναι το ποια θα είναι η τρέχουσα τιμή $p_{i,t}$ που θα διαμορφώσει η αγορά τη χρονική στιγμή t με δεδομένη την υποκειμενική προσδοκία $E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ για την «αυριανή» τιμή. Προκειμένου να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα πρέπει να υιοθετήσουμε μια επιπλέον πολύ βασική υπόθεση: Ποιος είναι ο τρόπος διαμόρφωσης των αναμενόμενων αποδόσεων ισορροπίας $E(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$; Με άλλα λόγια, τι απαιτεί η αγορά σε όρους αναμενόμενης απόδοσης της επενδυτικής κατηγορίας i προκειμένου η ζήτηση που θα εκφράσει για την i να ισούται με την υφιστάμενη προσφορά της i έτσι ώστε να επιτευχθεί ισορροπία; Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η αγορά ισορροπεί όταν σε κάθε χρονική στιγμή t, η αναμενόμενη απόδοση $E(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ είναι ίση με μια σταθερή ποσότητα, $E(R_i)$ Κάτω από αυτή την υπόθεση διαμόρφωσης αναμενόμενων αποδόσεων ισορροπίας, ο τρόπος με τον οποίο η αγορά διαμορφώνει την τρέχουσα τιμή $p_{i,t}$ είναι ο εξής: Όπως είπαμε, το πρώτο που κάνει η αγορά είναι, ευρισκόμενη στη χρονική στιγμή t, να διαμορφώσει μια υποκειμενική προσδοκία, $E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ για την αυριανή τιμή. Με βάση αυτή τη διαμορφωμένη προσδοκία, η αγορά θα ισορροπήσει όταν θέσει μια τρέχουσα τιμή $p_{i,t}$ τέτοια ώστε η αναμενόμενη απόδοση

$$E(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t) - p_{i,t}$$

να ισούται με τη σταθερή ποσότητα $E(R_i)$. Με άλλα λόγια, σε κάθε χρονική στιγμή t η αγορά αποφασίζει για την τιμή ισορροπίας $p_{i,t}$ λύνοντας την εξίσωση

$$E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t) - p_{i,t} = E(R_i)$$

ως προς το $p_{i,t}$. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μετοχή i για την οποία $E(R_i) = 0{,}03$ (ή 3%). Γιά τον λογάριθμο της τιμής αυτής της μετοχής, η υποκειμενική πρόβλεψη της αγοράς είναι $E(p_{i,t+1} \mid \Phi_t) = 4{,}6$. Η αγορά θα ισορροπήσει όταν διαμορφώσει μια τιμή $p_{i,t}$ ίση με $4{,}6 - 0{,}03 = 4{,}57$. Αν η τιμή είναι μεγαλύτερη από 4,57, τότε η αναμενόμενη απόδοση της αγοράς με βάση την υποκειμενική προσδοκία της τιμής την περίοδο t+1, είναι μικρότερη του 3%. Αυτό σημαίνει ότι η μετοχή i δεν είναι αρκετά ελκυστική στους επενδυτές και ως εκ τούτου η αγορά χαρακτηρίζεται από υπερβάλλουσα προσφορά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πτώση της τιμής έως το επίπεδο του 4,57 στο οποίο αποκαθίσταται η ισορροπία.

Παρατήρηση:

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα στη σύγχρονη Χρηματοοικονομική είναι ο τρόπος με τον οποίο οι επενδυτές αποφασίζουν το ύψος της αναμενόμενης απόδοσης $\mathrm{E}\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ που απαιτούν προκειμένου να διακρατήσουν το επενδυτικό αγαθό i. Στα σύγχρονα μοντέλα αποτίμησης όπως το CAPM (Capital Asset Pricing Model) που προτάθηκε από τους Treynor (1962), Sharpe (1964), Lintner (1965a,b) και Mossin (1966) ή το APM (Arbitrage Pricing Model) του Ross (1976), η αναμενόμενη απόδοση $\mathrm{E}\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ είναι θετική συνάρτηση του «ρίσκου» του επενδυτικού αγαθού i. Στη συνέχεια θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

2.1 Ορθολογικές προσδοκίες

Η πρώτη περίπτωση είναι αυτή του ορθολογικού τυπικού επενδυτή, δηλαδή της ορθολογικής αγοράς. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει την υποκατάσταση του υποκειμενικού τελεστή E με τον μαθηματικό τελεστή E ο οποίος έχει γνωστές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, η υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών σημαίνει ότι ο τυπικός επενδυτής διαμορφώνει τις προσδοκίες του χρησιμοποιώντας το «ορθό» μέτρο πιθανότητας, δηλαδή αυτό που είναι συνεπές με τον νόμο των μεγάλων αριθμών. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλος τρόπος διαμόρφωσης προσδοκιών με βάση το Φ_t που να υπερτερεί αυτού που ονομάσαμε ορθολογικό. Βεβαίως αν κάποιος μεμονωμένος επενδυτής έχει πρόσβαση σε ένα προνομιακό σύνολο πληροφοριών (για παράδειγμα εσωτερική πληροφόρηση), τότε το δικό του σύνολο πληροφοριών είναι διαφορετικό από αυτό της αγοράς, (δηλαδή το Φ_t) και ως εκ τούτου μπορεί οι προσδοκίες που δύναται να διαμορφώσει να υπερτερούν των ορθολογικών.

Η συζήτηση που προηγήθηκε μπορεί να τυποποιηθεί κάτω από την υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών ως εξής: Αρχικά υποθέτουμε ότι απόδοση, $R_{i,t+1}$ μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t+1 είναι γραμμική συνάρτηση της μη-αναμενόμενης (κατά τη χρονική στιγμή t) αλλαγής (κατά τη χρονική στιγμή t+1) του οικονομικού παράγοντα x_t:

$$R_{i,t+1} = a_i + b_i\,[x_{t+1} - E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] + u_{i,t+1} \tag{1}$$

όπου επίσης υποθέτουμε ότι ο τυχαίος όρος $u_{i,t+1}$ έχει μέσο ίσο με το μηδέν και είναι ανεξάρτητος του x_{t+1}. Η ορθολογική πρόβλεψη της απόδοσης που διενεργείται από την αγορά τη χρονική στιγμή t για τη χρονική στιγμή t+1 μπορεί να εξαχθεί αν εφαρμόσουμε και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας τον μαθηματικό τελεστή $E\,(\cdot \mid \Phi_t)$. Αυτή η εφαρμογή μας δίνει το εξής:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = a_i + b_i\,[\,E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] + \mathrm{E}\,(u_{i,t+1} \mid \Phi_t)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = a_i \tag{2}$$

Παρατηρήσεις:

(i) Η βασική σχέση (1) που περιγράφει τον γενεσιουργό μηχανισμό των αποδόσεων έχει ως συνέπεια το ότι η απόκλιση $R_{i,t+1} - a_i$ μεταξύ της πραγματικής απόδοσης $R_{i,t+1}$ και της αναμενόμενης a_i (δηλαδή η «έκπληξη στην απόδοση») να είναι γραμμική συνάρτηση της «έκπληξης» στον παράγοντα x. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t ο τυπικός επενδυτής έχει διαμορφώσει μια ορθολογική προσδοκία $E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ για τη μελλοντική τιμή του παράγοντα x και επίσης μια ορθολογική προσδοκία $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ για τη μελλοντική απόδοση. Αν κατά τη χρονική στιγμή t+1 η πραγματική τιμή του παράγοντα x είναι ίση με την προσδοκία, δηλαδή αν $x_{t+1} = E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ τότε και η πραγματική απόδοση που θα σημειωθεί $R_{i,t+1}$ θα είναι ακριβώς ίση με την αναμενόμενη συν την τιμή του τυχαίου όρου $u_{i,t+1}$. Αντίθετα, μια θετική έκπληξη στον παράγοντα x δηλαδή $x_{t+1} - E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) > 0$ θα επιφέρει μια θετική έκπληξη στη απόδοση της περιόδου t+1.

(ii) Η παραπάνω παρατήρηση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής: Η υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών για τη μελλοντική τιμή της x σημαίνει ότι αυτές οι αποδόσεις είναι κατά μέσο όρο σωστές, δηλαδή:

$$x_{t+1} = E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) + \varepsilon_{xt+1} \tag{3}$$

όπου ο όρος ε_{xt+1} είναι μη-συστηματικός και έχει μέσο ίσο με το μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση η απόκλιση μεταξύ της πραγματοποιηθείσας και αναμενόμενης απόδοσης δηλαδή η διαφορά $R_{i,t+1}$ - a_i είναι ίση με:

$$R_{i,t+1} - a_i = b_i \varepsilon_{xt+1} + u_{i,t+1}$$

Κατά συνέπεια, οποιαδήποτε απόκλιση μεταξύ της πραγματοποιηθείσας και αναμενόμενης απόδοσης τη χρονική στιγμή t+1 οφείλεται αποκλειστικά και μόνο σε μη-αναμενόμενες αλλαγές στον συστηματικό παράγοντα x ή/και σε τυχαίους παράγοντες που εκφράζονται από τον όρο $u_{i,t+1}$. Αυτές οι αλλαγές δεν ήταν προβλέψιμες κατά τη χρονική στιγμή t, και ως εκ τούτου μπορούν να θεωρηθούν «εκπλήξεις».

(iii) Η προηγούμενη συζήτηση προτείνει ότι υπάρχουν τρεις «δυνάμεις» που κινούν τις αποδόσεις $R_{i,t+1}$ στον χρόνο: (α) Η πρώτη είναι η προσδοκία για τη μελλοντική απόδοση $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ που είναι διαχρονικά σταθερή και ίση με a_i. (β) Η δεύτερη είναι η «έκπληξη» ε_{xt+1} στην τιμή του συστηματικού παράγοντα τη χρονική στιγμή t+1. Σε αυτό το σημείο αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το ύψος της απόκλισης στις αποδόσεις (για ένα δεδομένο επίπεδο έκπληξης) διαφέρει από κατηγορία σε κατηγορία ανάλογα με τον συντελεστή βήτα της κάθε κατηγορίας. (γ) Η τρίτη είναι τα τυχαία συμβάντα που συμβαίνουν τη χρονική στιγμή t+1 και αντιπροσωπεύονται από τον όρο $u_{i,t+1}$.

(iv) Η διαχρονική σταθερότητα της αναμενόμενης απόδοσης a_i έχει συγκεκριμένες συνέπειες για τη στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, κάτω από την ισχύ της (1) ως γενεσιουργού μηχανισμού των αποδόσεων, η αναμενόμενη απόδοση $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ είναι ανεξάρτητη του συνόλου πληροφοριών Φ_t, διαχρονικά σταθερή και ίση με τον αδέσμευτο μέσο $E\,(R_{i,t+1}) = \alpha_i$. Αυτό σημαίνει ότι η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της Mean Conditional Independence (MCI) ή όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία να αναφέρεται (όχι με απόλυτη αυστηρότητα αν $\alpha_i \neq 0$) από την ιδιότητα martingale difference (βλέπε, για παράδειγμα, LeRoy 1973, 1989). Στην περίπτωση δε, που υποτεθεί επιπρόσθετα η στασιμότητα των όρων $b_i\,[x_{t+1} - E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)]$ και $u_{i,t+1}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων είναι επίσης στάσιμη. Να σημειωθεί πως αυτό συμβαίνει ακόμα και στην περίπτωση όπου η ανέλιξη $\{\varepsilon_{xt}\}$ είναι στάσιμη και το b_i δεν είναι διαχρονικά σταθερό αλλά περιγράφεται και αυτό από μία στάσιμη στοχαστική ανέλιξη $\{b_{it}\}$.

(v) Η σχέση (1) ορίζει ένα στατιστικό μοντέλο για τις αποδόσεις. Από μόνη της, χωρίς επιπρόσθετες υποθέσεις, δεν θέτει κάποιον συγκεκριμένο περιορισμό στον τρόπο με τον οποίο τιμολογείται το ρίσκο. Αν επιπλέον υποθέσουμε μια επαρκώς διαφοροποιημένη αγορά στην οποία δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, τότε η σχέση (1) σε συνδυασμό με τις επιπρόσθετες υποθέσεις συνεπάγεται ότι η αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας είναι ίση με:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \lambda_0 + \lambda_1 b_i$$

όπου λ_0 είναι η απόδοση ενός επενδυτικού αγαθού χωρίς ρίσκο και λ_1 είναι το πριμ ρίσκου του παράγοντα x (βλέπε Ross 1976).

(vi) Από τα παραπάνω συνάγεται ότι ο μεμονωμένος επενδυτής ή διαχειριστής κεφαλαίων που επιχειρεί να «νικήσει την αγορά» είναι καταδικασμένος σε αποτυχία, νοουμένου ότι το σύνολο πληροφοριών που διαθέτει δεν διαφέρει από αυτό της αγοράς, δηλαδή το Φ_t.

Στη συνέχεια, ας δούμε τις συνέπειες που έχει η υπόθεση (1) σε συνδυασμό με την υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών για την πρόβλεψη της διακύμανσης $Var\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$, καθώς και της συνδιακύμανσης $Cov\,[(R_{i,t+1}, R_{j,t+1}) \mid \Phi_t]$, $i \neq j$ των αποδόσεων για τη χρονική στιγμή $t+1$. Συγκεκριμένα, για τη διακύμανση έχουμε:

$$Var\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = Var\,((\alpha_i + b_i\,[x_{t+1} - E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] + u_{i,t+1}) \mid \Phi_t)$$

$$= b_i^2\; Var\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) + Var\,(u_{i,t+1}) \qquad (4)$$

Όσον αφορά τη συνδιακύμανση, ας υποθέσουμε πως ο αντίστοιχος παράγοντας της μετοχής j είναι ο y_t. Τότε, η απόδοση $R_{j,t}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$R_{j,t+1} = \alpha_j + b_j\,[y_{t+1} - E\,(y_{t+1} \mid \Phi_t)] + u_{j,t+1}$$

και η συνδιακύμανση $Cov\,[(R_{i,t+1}, R_{j,t+1}) \mid \Phi_t]$ δίνεται ως εξής:

$$Cov\,[(R_{i,t+1}, R_{j,t+1}) \mid \Phi_t] = b_i\; b_j\; Cov\,[(x_{i,t+1}, y_{j,t+1}) \mid \Phi_t] \qquad (5)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι δεν υπάρχει γραμμική εξάρτηση ανάμεσα στους ιδιοσυγκρατικούς παράγοντες $u_{i,}$ και $u_{j,}$, δηλαδή ότι $Cov\,[(u_{i,t+1}, u_{j,t+1}) \mid \Phi_t] = 0$. Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω σχέσεις για τις δεσμευμένες ροπές δεύτερης τάξης των αποδόσεων συνεπάγονται τα εξής:

(i) Η παρουσία δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας (όπως για παράδειγμα τύπου GARCH) στις αποδόσεις $R_{i,t}$ εξαρτάται από το αν η στοχαστική ανέλιξη $\{x_t\}_{t\geq 1}$ και/ή στοχαστική ανέλιξη $\{u_{i,t}\}_{t\geq 1}$ χαρακτηρίζονται από δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα. Με άλλα λόγια, κάτω από την υπόθεση (1), προκειμένου να εξηγήσουμε τη δυναμική ετεροσκεδαστικότητα που παρατηρείται στις αποδόσεις των μετοχών είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε πως είτε ο συστηματικός είτε ο τυχαίος παράγοντας είτε και οι δύο χαρακτηρίζονται από αυτή την ιδιότητα. Αντίθετα, αν επιτρέψουμε στην παράμετρο b_i να μεταβάλλεται διαχρονικά επιδεικνύοντας αυτοσυσχέτιση, τότε η δυναμική ετεροσκεδαστικότητα των αποδόσεων εξηγείται ακόμα και αν και ο συστηματικός και ο τυχαίος παράγοντας είναι διαχρονικά ανεξάρτητες ανελίξεις (βλέπε Kourogenis and Pittis 2010).

(ii) Επιπλέον, η πρόβλεψη της διακύμανσης των αποδόσεων για την επόμενη χρονική περίοδο απαιτεί εκτός από την εκτίμηση της παραμέτρου b_i και προβλέψεις για την αυριανή διακύμανση τόσο του συστηματικού παράγοντα x_t όσο και του τυχαίου παράγοντα $u_{i,t}$.

(iii) Η σχέση (4) μπορεί να επεκταθεί ώστε να συμπεριλάβει ως ερμηνευτική μεταβλητή τη διακύμανση στις προβλέψεις των αναλυτών η οποία είναι διαθέσιμη τη χρονική στιγμή t και άρα αποτελεί στοιχείο του Φ_t.

Στρατηγική κατανομή επενδύσεων – ορθολογικές προσδοκίες – αποτελεσματικές αγορές

Η παραπάνω ανάλυση η οποία βασίστηκε στην υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών ή, ισοδύναμα, στην υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών προτείνει τα ακόλουθα βήματα για μια στρατηγική κατανομή επενδύσεων. Να σημειωθεί ότι με τον όρο «στρατηγική» εννοούμε την κατανομή επενδύσεων η οποία είναι άριστη από την οπτική γωνία του τυπικού επενδυτή ή του συνόλου της ορθολογικής αγοράς, η οποία χρησιμοποιεί με αποτελεσματικό τρόπο το σύνολο πληροφοριών Φ_t. Αυτό σημαίνει ότι κανένας μεμονωμένος επενδυτής ή διαχειριστής κεφαλαίων που δεν έχει προνομιακή πληροφόρηση δεν μπορεί να πετύχει καλύτερη κατανομή επενδύσεων από αυτή του τυπικού επενδυτή.

Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε προκειμένου να δημιουργήσουμε άριστα χαρτοφυλάκια είναι τα εξής:

(i) Εύρεση του μακροοικονομικού παράγοντα x_t (ή του συνόλου των παραγόντων αν αυτοί είναι πολλοί) ανά επενδυτική κατηγορία. Οι Chen, Roll and Ross (1986) ισχυρίζονται ότι για τις αμερικανικές μετοχές οι μεταβλητές x_t που αντιπροσωπεύουν πηγές κινδύνου είναι η διαφορά μεταξύ μακροχρόνιων και βραχυχρόνιων επιτοκίων, ο αναμενόμενος και μη-αναμενόμενος πληθωρισμός, η βιομηχανική παραγωγή και η διαφορά μεταξύ των αποδόσεων των ομολόγων υψηλής και χαμηλής διαβάθμισης.

(ii) Εκτίμηση της σχέσης (1) για κάθε επενδυτική κατηγορία, όπου ως $E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ θα χρησιμοποιήσουμε τις προβλέψεις των αναλυτών που είναι διαθέσιμες τη χρονική στιγμή t. Η εκτίμηση αυτών των σχέσεων θα μας δώσει τις παραμέτρους a_i των n επενδυτικών κατηγοριών, οι οποίες δεν είναι άλλες από τις (διαχρονικά σταθερές) αναμενόμενες αποδόσεις αυτών των κατηγοριών. Στο σημείο αυτό αξίζει να κάνουμε μια διάκριση μεταξύ στατιστικής επάρκειας και οικονομικής ερμηνείας. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει πιθανότητα κάποιες μεταβλητές να αποδειχθούν στατιστικά σημαντικές, χωρίς να μπορούμε να δείξουμε ότι όντως αντιπροσωπεύουν παράγοντες κινδύνου τους οποίους τιμολογεί η αγορά στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου. Αυτό δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι οι μεταβλητές αυτές πρέπει να αφαιρεθούν από το στατιστικό υπόδειγμα. Εναλλακτικά, μπορεί το θεωρητικό πλαίσιο μέσα στο οποίο γίνεται η αξιολόγησή τους να είναι εσφαλμένο.

(iii) Εναλλακτικά, οι αναμενόμενες αποδόσεις $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \alpha_i$ μπορούν να εκτιμηθούν παίρνοντας τους δειγματικούς μέσους των πραγματοποιηθεισών ιστορικών αποδόσεων $R_{i,t}$.

(iv) Εκτίμηση των δεσμευμένων διακυμάνσεων $Var\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ και συνδιακυμάνσεων $Cov\,[(R_{i,t+1}, R_{j,t+1}) \mid \Phi_t]$ από τις σχέσεις (4) και αντίστοιχα. Για τις εκτιμήσεις αυτές χρειαζόμαστε εκτός των παραμέτρων b_i και εκτιμήσεις των $Var\,(x_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ και $Var\,(u_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ οι οποίες μπορούν να αποκτηθούν υποθέτοντας ότι οι ανελίξεις $\{x_t\}_{t\geq 1}$ και $\{u_{i,t}\}_{t\geq 1}$ είναι GARCH. (Εναλλακτικά, πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διακύμανση των προβλέψεων των αναλυτών προκειμένου να εκτιμήσουμε τη διακύμανση της x;)

(v) Εισαγωγή των εκτιμήσεων από τα βήματα (iii) και (iv) στη διαδικασία αριστοποίησης και εύρεση των άριστων χαρτοφυλακίων με βάση το σύνολο πληροφοριών Φ_t.

2.2 Μη-ορθολογικές προσδοκίες

Η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών ή με άλλα λόγια στην υπόθεση ότι η αγορά χρησιμοποιεί το σωστό μέτρο πιθανότητας στη δημιουργία των προσδοκιών της. Μια συνέπεια αυτής της υπόθεσης είναι ότι η αγορά δεν κάνει «συστηματικά λάθη» στις προβλέψεις της. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για μια δεδομένη χρονική περίοδο η αγορά έκανε κάποιο συστηματικό σφάλμα στη δημιουργία των υποκειμενικών προβλέψεων $\mathrm{E}\,(x_{i,t+1} \mid \Phi_t)$, τότε η υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών σημαίνει ότι σύντομα η αγορά θα αντιληφθεί το λάθος αυτό και θα αναπροσαρμόσει κατάλληλα τις προσδοκίες της, αποκαθιστώντας έτσι την ορθολογικότητα.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το αν όντως η αγορά δημιουργεί ορθολογικές προβλέψεις και αν όχι πώς ένας μεμονωμένος επενδυτής που ανίχνευσε αυτή τη μη-ορθολογικότητα μπορεί να την εκμεταλλευτεί για να δημιουργήσει χαρτοφυλάκια καλύτερα από το «άριστο» χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Και πάλι θα υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις σε κάθε χρονική περίοδο καθορίζονται από τις «εκπλήξεις» στον παράγοντα x, μόνο που τώρα οι εκπλήξεις ορίζονται με βάση τον υποκειμενικό τελεστή $\mathrm{E}\,(\cdot \mid \Phi_t)$ αντί του μαθηματικού τελεστή $E\,(\cdot \mid \Phi_t)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μοντέλο που περιγράφει τη διαχρονική συμπεριφορά των αποδόσεων να είναι το

$$R_{i,t+1} = \alpha_i + b_i\,[x_{t+1} - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] + u_{i,t+1} \tag{6}$$

Η υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή x_{t+1} (για παράδειγμα, ο λογάριθμος της βιομηχανικής παραγωγής) μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$x_{t+1} = E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) + v_{t+1} \tag{7}$$

ή αφαιρώντας τον όρο x_t και από τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης

$$x_{t+1} - x_t = [\,E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t\,] + v_{t+1}$$

όπου ο τυχαίος όρος v_{t+1} τη μη-συστηματική συνιστώσα. Ο όρος $x_{t+1} - x_t$ εκφράζει τον πραγματικό ρυθμό μεταβολής της x μεταξύ των περιόδων t και t+1, ενώ ο όρος $[E(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t]$ εκφράζει τον αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής, με την προσδοκία να έχει σχηματιστεί τη χρονική στιγμή t. Αυτό σημαίνει ότι οι υποκειμενικές προσδοκίες $[\mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t]$ για τον ρυθμό μεταβολής της x οι οποίες είναι παρατηρήσιμες σε κάθε χρονική στιγμή t (για παράδειγμα οι προβλέψεις των αναλυτών της Bloomberg) είναι ορθολογικές αν στο πλαίσιο της εξίσωσης

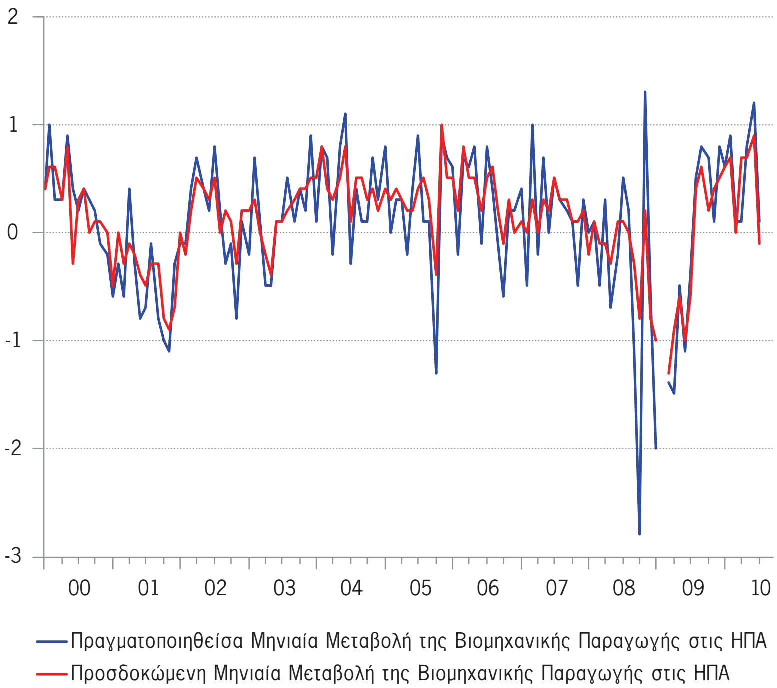
$$x_{t+1} - x_t = \delta_0 + \delta_1 [\mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t] + \xi_{t+1} \tag{8}$$

ικανοποιούν τους εξής περιορισμούς:

$$\delta_0 = 0$$
$$\delta_1 = 1 \tag{9}$$
$$\xi_{t+1} = v_{t+1}$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση των μηνιαίων προβλέψεων της Bloomberg για τον ρυθμό μεταβολής της βιομηχανικής παραγωγής. Δηλαδή, για τη συγκεκριμένη περίπτωση το $x_{t+1} - x_t$ συμβολίζει την πραγματοποιηθείσα μεταβολή της βιομηχανικής παραγωγής μεταξύ των περιόδων t και t+1, ενώ το $[\mathrm{E}(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t]$ συμβολίζει την προσδοκία της αγοράς για τη μεταβολή της βιομηχανικής παραγωγής μεταξύ των περιόδων t και t+1. Οι δύο σειρές που εξετάζουμε, δηλαδή η πραγματοποιηθείσα και η προσδοκώμενη μηνιαία μεταβολή της βιομηχανικής παραγωγής εμφανίζονται στο Διάγραμμα 1 για τη χρονική περίοδο Ιανουάριος 2000 – Ιούλιος 2010.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1 Πραγματοποιηθείσα και Προσδοκώμενη Μηνιαία Μεταβολή της Βιομηχανικής Παραγωγής στις ΗΠΑ



Οι στατιστικές ιδιότητες των δύο αυτών σειρών για την υπό εξέταση περίοδο συνοψίζονται στον Πίνακα 1:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 Περιγραφικά Στατιστικά της Πραγματοποιηθείσας, $x_{t+1} - x_t$ και Προσδοκώμενης, $[\,E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t\,]$, Μηνιαίας Μεταβολής της Βιομηχανικής Παραγωγής στις ΗΠΑ

	$x_{t+1} - x_t$	$E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t$
Μέσος	0,084	0,128
Διάμεσος	0,150	0,200
Τυπική Απόκλιση	0,654	0,434
Ασυμμετρία	-1,161	-0,875
Κύρτωση	5,590	3,731
Jarque–Berra test	63,83	18,91
Συντελεστής AR(1)	0,266	0,585
Έλεγχος Αυτοσυσχέτισης Q(12)	38,73	149,75

Ο Πίνακας 1 προτείνει τα εξής:

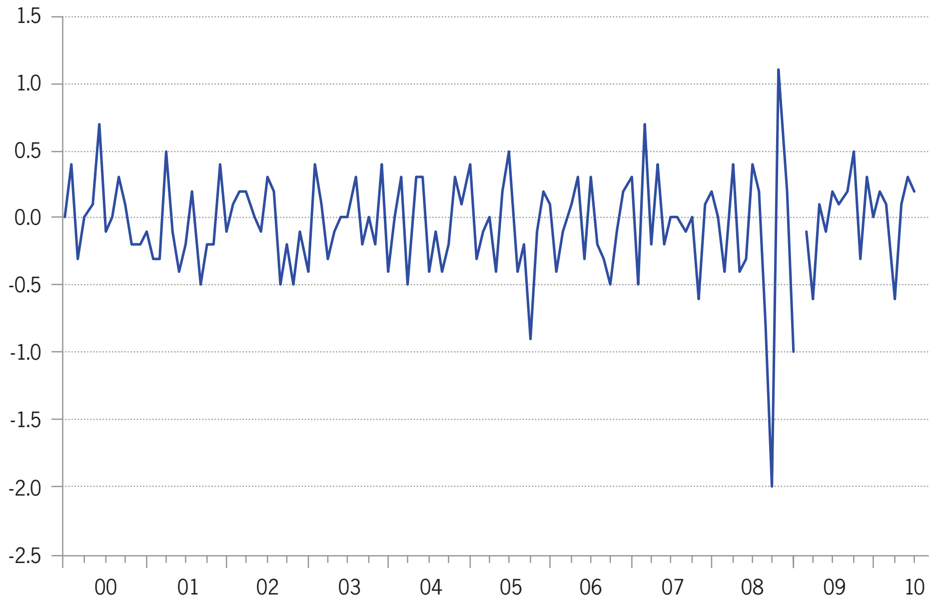
(i) Ο δειγματικός μέσος (και η διάμεσος) των προσδοκώμενων μεταβολών είναι μεγαλύτερος του μέσου των πραγματικών μεταβολών. Αντίθετα, η τυπική απόκλιση των προσδοκώμενων μεταβολών είναι σημαντικά μικρότερη αυτής των πραγματικών. Αυτές οι διαφορές οφείλονται στην αδυναμία των προσδοκώμενων μεταβολών να προβλέψουν επαρκώς τις μεγάλες αρνητικές πραγματικές μεταβολές που υπάρχουν στο δείγμα. Με άλλα λόγια, οι αναλυτές εμφανίζονται ιδιαίτερα συντηρητικοί στο να προβούν σε ιδιαίτερα μεγάλες (κατά απόλυτη τιμή) αρνητικές προβλέψεις.

(ii) Το παραπάνω χαρακτηριστικό αντανακλάται και στα κατανομικά χαρακτηριστικά των δύο σειρών. Πιο συγκεκριμένα, οι προσδοκώμενες μεταβολές χαρακτηρίζονται από μικρότερη αρνητική ασυμμετρία και κύρτωση από ό,τι οι πραγματικές μεταβολές.

(iii) Η αδυναμία των αναλυτών να προβούν σε ραγδαίες μεταβολές των προβλέψεών τους από μήνα σε μήνα προκαλεί έναν ιδιαίτερα μεγάλο βαθμό persistence στις προσδοκώμενες μεταβολές σε σχέση με τις πραγματικές. Πράγματι, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των προσδοκώμενων μεταβολών είναι υπερδιπλάσιος αυτού των πραγματικών μεταβολών.

Η διαχρονική πορεία των εκπλήξεων σχετικά με τη βιομηχανική παραγωγή, δηλαδή η μεταβλητή $x_{t+1} - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ που εμφανίζεται στη σχέση (6) παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 2:

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2 Διαχρονική Συμπεριφορά των Μη Αναμενόμενων Ρυθμών Μεταβολής της Βιομηχανικής Παραγωγής στις ΗΠΑ



Στη συνέχεια θα προβούμε σε εκτίμηση της σχέσης (8) προκειμένου να ελέγξουμε την υπόθεση των ορθολογικών προσδοκιών. Τα αποτελέσματα της εκτίμησης για την περίπτωση της βιομηχανικής παραγωγής εμφανίζονται στον Πίνακα 2:

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 Έλεγχος της Υπόθεσης των Ορθολογικών Προβλέψεων για τη Βιομηχανική Παραγωγή (Ιαν. 2000 – Ιούλ. 2010)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0,076655	0,033695	-2,274983	0,0246
$\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t$	1,256701	0,074695	16,82450	0,0000
R-squared	0,695379	Mean dependent var		0,084921
Adjusted R-squared	0,692923	S.D. dependent var		0,654225
S.E. of regression	0,362536	Akaike info criterion		0,824360
Sum squared resid	16,29761	Schwarz criterion		0,869380
Log likelihood	-49,93467	F-statistic		283,0637
Durbin–Watson stat	2,253118	Prob(F-statistic)		0,000000

Τα αποτελέσματα από την εκτίμηση της εξίσωσης συνοψίζονται ως εξής:

(i) Τόσο η εκτίμηση της παραμέτρου δ_0 όσο και αυτή της παραμέτρου δ_1 εμφανίζονται στατιστικά διάφορες του μηδέν και ένα, αντίστοιχα.

(ii) Το στατιστικό Durbin–Watson προτείνει την ύπαρξη ελαφράς αρνητικής συσχέτισης στον όρο ξ_t. Επιπρόσθετοι έλεγχοι επιβεβαιώνουν την ύπαρξη της αρνητικής συσχέτισης στα κατάλοιπα. Για παράδειγμα, το στατιστικό Q(12) ισούται με 27,17 με αντίστοιχη p-value ίση με 0,007. Οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρώτης και δεύτερης τάξης είναι ίσοι με -0,140 και -0,21 αντίστοιχα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνηγορούν στην απόρριψη της υπόθεσης των ορθολογικών προβλέψεων για τη μεταβολή της βιομηχανικής παραγωγής. Αυτό σημαίνει ότι οι υποκειμενικές προβλέψεις των αναλυτών $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ δεν δημιουργούνται με βάση το σωστό μέτρο πιθανότητας και άρα οι υποκειμενικές προβλέψεις $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ δεν ταυτίζονται με τις αντικειμενικές προβλέψεις $E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ οι οποίες χαρακτηρίζουν τη στοχαστική δομή του φαινομένου. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι υπάρχει περιθώριο για τον συγκεκριμένο επενδυτή, ο οποίος αντιλαμβάνεται αυτό τον ορθολογισμό, να τον εκμεταλλευτεί κατάλληλα προκειμένου να «νικήσει την αγορά». Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Υποθέτουμε ότι η σχέση (8) ισχύει με $\delta_0 \neq 0$ και $\delta_1 \neq 1$. Ο όρος $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ είναι γνωστός (παρατηρήσιμος) τη χρονική στιγμή t, δηλαδή με άλλα λόγια αποτελεί στοιχείο του Φ_t. Ας εφαρμόσουμε τον μαθηματικό τελεστή $E\,(\cdot \mid \Phi_t)$ και στα δύο μέλη της (8):

$$E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t = \delta_0 + \delta_1\; E\,(\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t \mid \Phi_t) + E\,(\xi_{t+1} \mid \Phi_t)$$

από όπου συνεπάγεται ότι:

$$E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t = \delta_0 + \delta_1\, \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \delta_1 x_t + E\,(\xi_{t+1} \mid \Phi_t) \tag{10}$$

Σχετικά με τον τελευταίο όρο, άν η ανέλιξη $\{\xi_t\}_{t \geq 1}$ είναι mean conditional independent τότε

$E\,(\xi_{t+1} \mid \Phi_t) = 0$. Αντίθετα, αν η ανέλιξη $\{\xi_t\}_{t \geq 1}$ επιδεικνύει διαχρονική εξάρτηση τότε

$E\,(\xi_{t+1} \mid \Phi_t) = h(\Phi_t)$. Για παράδειγμα, αν η $\{\xi_t\}_{t \geq 1}$ είναι AR(1), $\xi_t = \rho_\xi \xi_{t-1} + \varepsilon_{\xi t}$ τότε

$E\,(\xi_{t+1} \mid \Phi_t) = \rho_\xi \xi_t$

περίπτωση κατά την οποία η σχέση (10) γίνεται:

$$E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t = \delta_0 + \delta_1\, \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \delta_1 x_t + \rho_\xi \xi_t \tag{11}$$

Να σημειωθεί ότι ο όρος ξ_t είναι μη-παρατηρήσιμος αλλά μπορεί να υποκατασταθεί από τον παρατηρήσιμο όρο $\hat{\xi}_t$:

$\hat{\xi}_t = x_t + \hat{\delta}_0 - \hat{\delta}_1\, \mathrm{E}\,(x_t \mid \Phi_{t-1})$.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε κάποιους απλούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς στην (11) προκειμένου να εξάγουμε μια έκφραση για τη διαφορά $E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Συγκεκριμένα, αφαιρώντας και από τα δύο μέλη της (11) τον όρο $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ και μεταφέροντας το x_t στο δεξιό σκέλος της (11), έχουμε:

$$E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) = \delta_0 + (\delta_1 - 1)\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) + (1 - \delta_1)x_t + \rho_\xi \xi_t \tag{12}$$

Η σχέση (12) σημαίνει ότι η διαφορά μεταξύ των ορθολογικών και υποκειμενικών προβλέψεων που διενεργούνται τη χρονική στιγμή t είναι συνάρτηση μεταβλητών που ανήκουν στο Φ_t.

Η σχέση (12) μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί ως εξής: Ας επανέλθουμε στη βασική σχέση (6) που εκφράζει τον γενεσιουργό μηχανισμό των αποδόσεων και ας εφαρμόσουμε και στα δύο σκέλη της τον μαθηματικό τελεστή $E\,(\cdot \mid \Phi_t)$:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \alpha_i + b_i [E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] + E\,(u_{t+1} \mid \Phi_t), \tag{13}$$

και αφού $\mathrm{E}\,(u_{t+1} \mid \Phi_t) = 0$ τελικά προκύπτει ότι:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \alpha_i + b_i [E\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - \mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)] \tag{14}$$

Η παραπάνω σχέση προτείνει ότι η αναμενόμενη απόδοση $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ που χαρακτηρίζει τη στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων δεν είναι πλέον σταθερή σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά αντίθετα είναι συνάρτηση της διαφοράς μεταξύ της ορθολογικής και υποκειμενικής πρόβλεψης για τον παράγοντα x. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι αυτή η διαφορά έχει μια συγκεκριμένη έκφραση σε όρους μεταβλητών που είναι παρατηρήσιμες τη χρονική στιγμή t, όπως προτείνει η σχέση (12). Πράγματι, αντικαθιστώντας την (12) στην (14) παίρνουμε:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \alpha_i + b_i\,[\delta_0 + (\delta_1 - 1)\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) + (1 - \delta_1)x_t + \rho_\xi \xi_t]$$

και τελικά:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = \alpha_i + b_i\,[\delta_0 + (\delta_1 - 1)(\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t) + \rho_\xi \xi_t]. \tag{15}$$

Παρατηρήσεις

(i) Η σχέση (15) σημαίνει ότι ο δεσμευμένος μέσος $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ των αποδόσεων είναι συνάρτηση της δεσμεύουσας πληροφορίας Φ_t. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων δεν είναι MCI.

(ii) Η σχέση (15) ερμηνεύεται ως εξής: Η αγορά διαπράττει ένα συστηματικό σφάλμα στην πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$ του παράγοντα x. Αυτό το σφάλμα «ενσωματώνεται» στα στοχαστικά χαρακτηριστικά της στοχαστικής ανέλιξης των αποδόσεων. Κατά συνέπεια, η ορθολογική πρόβλεψη $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ των αποδόσεων η οποία χρησιμοποιεί το σωστό μέτρο πιθανότητας, δηλαδή αυτό που αντικειμενικά πηγάζει από τα στοχαστικά χαρακτηριστικά του φαινομένου, θα πρέπει αναγκαστικά να λάβει υπόψη το συστηματικό αυτό σφάλμα, αφού το τελευταίο αποτελεί μέρος του στοχαστικού μηχανισμού που παράγει τις αποδόσεις.

(iii) Ως συνέπεια της μη ορθολογικότητας έχουμε το φαινόμενο η ορθή πρόβλεψη της απόδοσης $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ τη χρονική στιγμή t να διαφέρει από την αναμενόμενη απόδοση ισορροπίας, α_i, δηλαδή από το πριμ κινδύνου που απαιτούν οι επενδυτές προκειμένου να διακρατήσουν τη μετοχή i.

(iv) Η μη-ορθολογικότητα συνεπάγεται το ότι ο δεσμευμένος μέσος $E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t)$ είναι συνάρτηση του Φ_t, το οποίο σημαίνει ότι η στοχαστική ανέλιξη των αποδόσεων δεν είναι πλέον MCI.

Δύο αριθμητικά παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Αποδόσεις του δείκτη SP500 με χρήση ενός παράγοντα.

Ας υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις του SP500 εξαρτώνται μόνο από έναν παράγοντα, τις μη-αναμενόμενες μεταβολές στη βιομηχανική παραγωγή. Η εκτίμηση της σχέσης () κάτω από αυτές τις υποθέσεις έδωσε τα εξής αποτελέσματα: $\hat{\alpha}_i = -0{,}13$ και $\hat{b}_i = 2{,}25$. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 έχουμε ακόμα ότι $\hat{\delta}_0 = -0{,}076$, $\delta_1 = 1{,}256$ και $\rho_\xi = -0{,}140$. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις οι αναμενόμενες αποδόσεις του SP500 για κάθε μήνα στο δείγμα μας είναι:

$$E\,(R_{i,t+1} \mid \Phi_t) = -0{,}13 + 2{,}25\,[\,-0{,}076 + (1{,}256 - 1)(\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t) - x_t)] - 0{,}14 * \hat{\xi}_t. \tag{16}$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (16) για τον προσδιορισμό των αναμενόμενων αποδόσεων, η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE) ως προς τις πραγματοποιηθείσες αποδόσεις ήταν 5,09 για όλο το δείγμα. Αυτή η τιμή ήταν κατά 2,75% μικρότερη από το 5,23, την τιμή δηλαδή του RMSE που προέκυψε όταν χρησιμοποιήθηκαν κατευθείαν οι προβλέψεις $\mathrm{E}\,(x_{t+1} \mid \Phi_t)$.

Παράδειγμα 2: Αποδόσεις των αμερικανικών ομολόγων baa με χρήση δύο παραγόντων.

Στο δεύτερο παράδειγμα υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις του δείκτη αμερικανικών ομολόγων baa εξαρτώνται από τις μη-αναμενόμενες μεταβολές στη βιομηχανική παραγωγή, $x_{1t+1} - E\,(x_{1t+1} \mid \Phi_t)$, και από τις μη-αναμενόμενες μεταβολές στον δείκτη τιμών παραγωγού (PPI), $x_{2t+1} - E\,(x_{2t+1} \mid \Phi_t)$. Αυτή η σχέση περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$R_{i,t+1} = \alpha_i + b_{i1}\,[x_{1t+1} - \mathrm{E}\,(x_{1t+1} \mid \Phi_t)] + b_{i2}\,[\,x_{2t+1} - \mathrm{E}\,(x_{2t+1} \mid \Phi_t)] + u_{i,t+1.} \tag{17}$$

Όπως είδαμε και στην περίπτωση του ενός παράγοντα η διαφορά $E\,(x_{j,t+1} \mid \Phi_t)$ - $\mathrm{E}\,(x_{j,t+1} \mid \Phi_t)$, $j = 1,2$, δίνεται από την εξίσωση:

$$E\,(x_{j,t+1} \mid \Phi_t) - \mathrm{E}\,(x_{j,t+1} \mid \Phi_t) = \delta_{j0} + (\delta_{j1} - 1)\mathrm{E}\,(x_{jt+1} \mid \Phi_t) + (1\text{-}\delta_{j1})\,x_{jt} + \rho_{j\xi}\xi_{jt},\, j = 1,2. \tag{18}$$

Για τον πρώτο παράγοντα χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις που περιγράφονται στον Πίνακα 2, ενώ για τον δεύτερο οι εκτιμημένες τιμές των $\delta_{1,0}$ και $\delta_{2,0}$ είναι -0,062 και 1,524 αντίστοιχα. Για τη σταθερά α_i και τους συντελεστές b_{i1} και b_{i2} οι εκτιμήσεις είναι -0,038, -0,19 και 0,125 αντίστοιχα. Όπως είχαμε δει στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε $\hat{\rho}_{1\xi}$ = -0,140 και η εκτίμηση του $\rho_{2\xi}$ είναι $\hat{\rho}_{2\xi}$ = -0,107 Τελικά, και σε αυτή την εφαρμογή υπάρχει όφελος από την αξιοποίηση του συστηματικού σφάλματος των προβλέψεων. Πιο συγκεκριμένα, το RMSE είναι 0,275 έναντι RMSE 0,301 στην περίπτωση απ' ευθείας χρήσης των προβλέψεων, δηλαδή προκύπτει σχετικό όφελος 9,45%.

3. Συμπεράσματα

Σε αυτή την εργασία αναλύθηκαν οι επιπτώσεις της υπόθεσης του ορθολογικού επενδυτή και κατ' επέκταση των ορθολογικών προσδοκιών κατά την περιγραφή των αποδόσεων μιας οποιασδήποτε κατηγορίας επένδυσης με τη χρήση παραγοντικών υποδειγμάτων υπό το πρίσμα της Arbitrage Pricing Theory (βλέπε Ross, 1976). Για να αναλύσουμε τις επιπτώσεις αυτές διακρίναμε δύο περιπτώσεις: Στην πρώτη περίπτωση υποθέσαμε ότι οι προσδοκίες για τις μελλοντικές μεταβολές των παραγόντων είναι ορθολογικές και δείξαμε ότι τότε, το αρχικό παραγοντικό υπόδειγμα δεν εμφανίζει συστηματικό σφάλμα. Στην περίπτωση αυτή η άριστη επενδυτική στρατηγική εξαντλείται στη στρατηγική κατανομή επενδύσεων και στη διακράτηση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Στη δεύτερη περίπτωση υποθέσαμε ότι οι προσδοκίες για τις μελλοντικές μεταβολές των παραγόντων δεν είναι ορθολογικές. Δείξαμε ότι τότε, η συστηματικότητα του σφάλματος των προσδοκιών μεταφέρεται στο σφάλμα του παραγοντικού υποδείγματος. Αξιοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, καταλήξαμε στην αναλυτική έκφραση που συνδέει την αναμενόμενη απόδοση με το συστηματικό μέρος του σφάλματος των προσδοκιών. Η έκφραση αυτή δύναται να εκτιμηθεί και να προσφέρει «τακτικά» οφέλη στην κατανομή επενδύσεων. Αξιοποιώντας αυτό το δεδομένο, εφαρμόσαμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για την πρόβλεψη των αναμενόμενων αποδόσεων του δείκτη S&P 500 και των αμερικανικών ομολόγων baa. Το όφελος και στις δύο περιπτώσεις ήταν η μείωση του RMSE κατά περίπου 3% στην πρώτη και περίπου 9,5% στη δεύτερη.

Βιβλιογραφία

Chen, N.-F., R. Roll and S. Ross (1986), "Economic Forces and the Stock Market", *Journal of Business* 59, pp. 383-403.

Connor, G., and R. A. Korajczyk (1989), "An intertemporal equilibrium beta pricing model", *Review of Financial Studies* 2, pp. 373-392.

Kourogenis, N. and N. Pittis (2010), "Can Autoregressive Betas Account for the Statistical Properties of Stock Returns?", Working paper available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1529995.

LeRoy, S. F. (1973), "Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Prices", *International Economic Review* 14, pp. 436-446.

LeRoy, S. F. (1989), "Efficient Capital Markets and Martingales", *Journal of Economic Literature* 27, pp. 1583-1621.

Lintner, J. (1965a), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics* 47, pp. 13-37.

Lintner, J. (1965b), "Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification," *Journal of Finance* 20, pp. 587-615.

Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance* 7, pp. 77-91.

Merton, R. C. (1973), "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica* 41, pp. 867-887.

Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica* 34, pp. 768-783.

Ohlson, J. A. and M. B. Garman (1980), "A Dynamic Equilibrium for the Ross Arbitrage Model", *Journal of Finance* 35, pp. 675-684.

Ross, S. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory* 13, pp. 341-360.

Sharpe, W. F. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance* 19, pp. 425-442.

Simon, H. A. (1955), "A Behavioral Model of Rational Choice", *Quarterly Journal of Economics* 69, pp. 99-118.

Treynor, J. (1962), "Toward a Theory of Market Value of Risky Assets". Published in ed. R. A. Korajczyk: *Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics*, Risk Books, 1999.